FONCTIONS DE DEMANDE EXCÉDENTAIRE ET STABILITÉ DES MARCHÉS

Grégory CHIGOLET[1]

RÉSUMÉ – *Cet article revient sur les recherches, menées au début des années soixante-dix, concernant la spécification des fonctions de demande excédentaire. Il apparaît alors que ces recherches – étroitement associées au problème de la stabilité des marchés – ont abouti à des résultats particulièrement négatifs englobés sous le titre générique de « théorème Sonnenschein-Mantel-Debreu ». En dépit de cette appellation commune, ces résultats ont été obtenus selon des démonstrations variées prêtant ainsi toujours à débat sur la véritable portée de chacune d'elle.*

MOTS CLÉS – fonctions de demande excédentaire, stabilité des marchés, théorème Sonnenschein-Mantel-Debreu

SUMMARY – *This article returns on researches, led at the beginning of the seventies, concerning the specification of excess demand functions. It appears while these researches – closely linked to the problem of the stability of markets – led to particularly negative results included under the generic title of "theorem Sonnenschein-Mantel-Debreu". In spite of this common appellation, these results were acquired according to various demonstrations and lending still debate about the true scope of each.*

KEYWORDS- *excess demand functions, markets stability, Sonnenschein-Mantel-Debreu theorem*

[1] Direction des Ressources Humaines de l'Armée de l'Air, Bureau de la Politique des Ressources Humaines, ministère de la défense. E-mail : gregory.chigolet@wanadoo.fr

1. INTRODUCTION

Les fonctions de demande excédentaire, résultantes des choix maximisant la satisfaction des agents, occupent une place prépondérante au sein de la théorie économique. Ainsi comme le note [Debreu, 1982] les états d'équilibres se définissent comme les solutions au système d'équation pour lequel « les demandes excédentaires égalisent le vecteur nul ». En dépit de ce rôle central que jouent ces fonctions, leurs propriétés n'ont été étudiées sérieusement qu'à partir des années soixante. Cet examen tardif s'explique par le fait que les économistes concentraient jusqu'alors principalement leurs efforts sur la question de l'existence de l'équilibre. Une fois celle-ci résolue au cours des années cinquante, les recherches sur les propriétés des fonctions de demande excédentaire s'amorcèrent logiquement en lien avec l'étude de la stabilité. La première difficulté à surmonter concerna la formalisation du mécanisme de convergence et plus spécifiquement du tâtonnement walrasien, imitation de la loi de l'offre et de la demande[2]. La représentation finalement utilisée majoritairement par les néoclassiques s'inspire directement de celle de [Samuelson, 1941] et prend la forme du système d'équations différentielles suivant[3]:

(1.1) $$P'(t) = z_i\,(P\,(t)) \quad i = 1,\ldots, n$$

où $P = (p_1,.., p_n)$ est un n-uplet représentant le vecteur-prix, z_i la fonction de demande excédentaire du bien i c'est-à-dire une application de $S = \left\{ P \in \mathbb{R}^n_{++} \,\middle|\, \|P\| = 1 \right\}$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. Les premières tentatives pour démontrer la stabilité de (1.1) eurent recours à une hypothèse de substituabilité brute. Il était supputé qu'une légère variation du prix d'un bien entraînait une variation dans le même sens de la demande excédentaire des autres biens. Partant de cette hypothèse [Arrow, Block et Hurwicz, 1959] parvenaient à construire une fonction de Lyapounov associée à (1.1) et à en prouver ainsi la stabilité[4].

---

[2] Le principe de la « loi de l'offre et la demande » a été exposé par [Walras, 1874, p. 133] : « il faut pour arriver aux prix d'équilibre, une hausse des prix des marchandises dont la demande effective est supérieure à l'offre effective et une baisse du prix de celles dont l'offre effective est supérieure à la demande effective ». Le lien entre « la loi de l'offre et la demande » et sa représentation mathématique, c'est-à-dire le tâtonnement walrasien, a notamment été étudié dans [Balasko, 1988]. Le lecteur désireux d'approfondir ce sujet peut s'y reporter. Notons juste que la formulation du tâtonnement retenue dans cet article (équation (1.1)) est une modélisation en temps continue (équations différentielles). Or, intuitivement le tâtonnement correspond à un processus séquentiel faisant appel à des équations de récurrence. Toutefois le recours à des équations différentielles est généralement privilégié afin d'éviter toute discontinuité relevant de l'aspect saccadé inhérent à une modélisation d'un processus en temps discret. Dans notre cas, ce point est secondaire dans la mesure où les systèmes discrets et continus ont des comportements localement analogues.

[3] Afin d'alléger les notations, on posera par la suite $P = P(t)$. Enfin signalons que les majuscules, sauf mention contraire, désignent des vecteurs.

[4] Il suffit pour cela d'associer à (1.1) la fonction de Lyapounov suivante qui s'interprète comme étant le taux de variation maximum des prix des biens lorsqu'on passe de P_e à P : $V(t) = \max_i \left| \frac{p_i(t)}{p_i^e} - 1 \right|$. Sans entrer dans le détail de sa construction, on voit aisément qu'elle est positive, minorée par zéro et décroissante dans le temps si on lui applique la règle du tâtonnement. En effet, cette dernière implique que le prix du bien i varie en fonction de la demande excédentaire de ce bien. Or comme $V(\cdot)$ ne retient que le bien dont le taux de variation est maximum, la propriété de substituabilité brute – qui implique

Bien que l'approche par la substituabilité brute s'avéra payante[5], elle posa néanmoins le problème de la justification d'hypothèses touchant directement la forme des fonctions de demande excédentaire. Ainsi, la demande excédentaire du bien dont le prix augmente décroit au profit des autres. Si cette assertion paraît raisonnable dans une perspective d'équilibre partiel, elle semble nettement plus discutable lorsqu'on se place dans une optique d'équilibre général. Il restait, selon l'expression de [Arrow, Hahn, 1971], à montrer « combien est bonne en réalité l'hypothèse ». Le débat s'en trouva donc modifié au début des années soixante-dix et porta sur la forme que devaient satisfaire les fonctions de demande excédentaire, issues des choix optimaux des agents, pour assurer la stabilité du tâtonnement. Rapidement, sous l'impulsion de [Sonnenschein, 1972], l'idée de renverser la problématique germa. Plutôt que de déterminer les conditions que doivent vérifier les fonctions de demande excédentaire, plusieurs auteurs se demandèrent si celles-ci ne pouvaient pas être simplement quelconques (en dehors d'hypothèses minimales liées au fait qu'elles vérifient la loi de Walras et qu'elles soient homogènes de degré zéro) [6]. Par ce biais, et moins d'un an après avoir opéré ce revirement méthodologique, [Sonnenschein, 1973] arriva aux conclusions suivantes: toute fonction continue, homogène de degré 0 et satisfaisant la loi de Walras peut-être considérée comme une fonction de demande excédentaire d'une économie d'échange où les agents ont des préférences monotones et convexes[7]. Si les premiers doutes sur la stabilité d'un équilibre général émergent avec le travail de H. Sonnenschein, la diversité des démonstrations établies à sa suite – [Mantel, 1974], [Debreu, 1974], [McFadden et *al*, 1974] – montre combien l'étude du problème de la stabilité était alors dans l'air du temps[8]. Pour ainsi dire le problème était mur. Toutefois, en dépit d'une proximité des conclusions et d'une méthodologie commune consistant à désagréger les fonctions de demande excédentaire, les démonstrations utilisées sont passablement différentes. Chacune s'appuyant sur des outils mathématiques spécifiques, dont l'interprétation économiques conduit à des controverses quant-à-leurs portées. C'est ainsi que pour [Deaton, 1975] la validité de ces preuves repose sur une dispersion singulière des préférences c'est-à dire des goûts des consommateurs : « the construction of arbitrary demand functions requires arbitrary manipulation of the income distribution and of preferences » (p. 237). Selon un point de vue légèrement discordant, [Balasko, 1988] estime que le résultat de Sonnenschein et ses successeurs est largement surestimé. Son

---

d'avoir $(z_i)'_{p_j}(P) > 0 \quad \text{avec} \quad i \neq j \quad i, j = 1, \ldots, n$ - impose que la demande excédentaire de ce bien soit en *P* inférieure à ce qu'elle est en *Pe*.

[5] Pour une synthèse des résultats de stabilité sous une hypothèse de substituabilité brute, se reporter à [Karlin, 1959].

[6] [Sonnenschein, 1972] exprime, le premier, clairement ce revirement méthodologique en posant la question suivante: « Can an arbitrary continuous function, defined on a compact subset *C* of the interior of a positive orthant, be an excess demand function for some commodity in a general equilibrium economy? » (p. 549)

[7] L'habitude a été prise de mentionner ce résultat sous le titre de « théorème Sonnenschein- Mantel-Debreu ». Une manière équivalente de le présenter est de dire que la relation de préférence des consommateurs n'implique aucune restriction sur la classe de la fonction de demande excédentaire. Résultat, qui comme nous allons le voir, « may be considered as extremely negative » [Kirman, Koch, 1986, p. 457].

[8] On ne cite ici que les démonstrations qui interviennent immédiatement à la suite de celle de Sonnenschein et que nous allons examiner. Sans cette restriction il serait possible d'ajouter à la liste les travaux de [Mantel, 1976], [Mas-colell, 1977], [Kirman, Kock, 1986]…les recherches sur la spécification des fonctions de demande excédentaire ayant entraîné à l'époque une véritable effervescence.

intérêt résidant dans la prise en compte de cas limite tel celui des marchandises quasi-gratuites dont les prix relatifs tendent vers zéro: « Ce résultat a été compris par certains économistes comme exprimant l'absence de propriétés spécifiques aux fonctions de demande excédentaire […]. Certains ont même poussé ce raisonnement à l'extrême pour y trouver une justification des modèles grossiers de la macroéconomie qui, eux, permettent des conclusions tranchées […]. Ces interprétations sont bien évidemment excessives et largement incorrectes. En effet, un comportement spécifique de la demande agrégée n'est pas du tout exclu par le résultat mentionné. Simplement, il doit prendre en compte le comportement au bord (c'est-à-dire quand un ou plusieurs prix tendent vers zéro ou l'infini) » (pp. 68-69). A l'opposé pour [Guerrien, 1989, p.129], « Le théorème de Sonnenschein-Mantel-Debreu a définitivement mis fin à tout espoir de démontrer, dans le cas général, la stabilité du tâtonnement ». Enfin, plus récemment, [Chiappori, Ekeland, 1999] lient la question de l'existence de propriétés spécifiques de la fonction de demande excédentaire au fait que le nombre d'agents est supérieur au nombre de biens « It is well-known by now that the answer is negative if the number of agents is greater than or equal to the number of goods in the economy.» (p. 112)
Plusieurs décennies après leurs publications, les économistes sont donc loin d'être unanimes quant à l'interprétation à donner aux preuves de Sonnenschein et consorts. C'est pourquoi cet article présente une synthèse aussi élémentaire que possible de plusieurs de ces démonstrations et se propose de discuter de la portée de chacune d'entre elles. Pour ce faire, et conformément à la démarche adoptée par les auteurs, nous limiterons notre examen à une économie d'échange pure. Ce qui signifie que les agents tirent leurs revenus de « dotations initiales » c'est-à-dire de biens qu'ils possèdent avant même que les marchés ne se mettent à fonctionner.

2. PREFERENCES REVELEES ET FORME DES DEMANDES EXCEDENTAIRES : LES DEMONSTRATIONS DE SONNENSCHEIN (1973) ET MANTEL (1974)

Les démonstrations de [Sonnenschein, 1973] et [Mantel, 1974] ont un point commun. Elles reposent l'une et l'autre sur le même principe à savoir l'axiome fort des préférences révélées et son corolaire le théorème Houthakker-Uzawa.

AXIOME FORT DES PREFERENCES REVELEES. Pour toute chaîne de paniers de biens[9] $Q(P^{(1)}),Q(P^{(2)}),...,Q(P^{(n)})$ vérifiant les inégalités, dont l'une au moins est stricte :

$$P^{(i-1)}Q(P^{(i)}) \leq P^{(i-1)}Q(P^{(i-1)})$$

on a :

$$P^{(n)}Q(P^{(n)}) < P^{(n)}Q(P^{(1)})$$

où $P^{(i)}$ représente le vecteur prix i.

[9] Sauf mention contraire, les majuscules désignent des vecteurs.

L'axiome fort des préférences révélées traduit un certain aspect de l'idée de rationalité économique à savoir la transitivité des choix du consommateur. Si pour une suite de paniers de biens le premier se révèle préféré au second, le second au troisième, ainsi de suite, alors son dernier ne peut se révéler être préféré au premier. Mais plutôt que de travailler directement sur la relation de préférence d'un consommateur donné, il est nettement plus commode de la rendre représentable et d'y associer une fonction d'utilité c'est-à-dire une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, traduisant les goûts du consommateur et vérifiant bien entendu la même propriété. Or, en règle générale, une telle fonction existe[10].Ce pose alors tout naturellement la question du lien entre cette fonction et celle de demande du consommateur. Le théorème Houthakker- Uzawa apporte une réponse à cette interrogation.

THEOREME HOUTHAKKER-UZAWA. Si *d (P, R)* est une fonction de demande individuelle d'un agent donné[11] de $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$ surjective, continue, lipschitzienne et qui vérifie l'axiome fort des préférences révélées ; alors il existe une fonction d'utilité monotone, continue et strictement quasi-concave associée à $d(\cdot)$.

Tant Sonnenschein que Mantel font appel, à un moment ou un autre, au théorème Houthakker- Uzawa. Ce qui ne sera d'ailleurs pas nécessairement le cas des démonstrations postérieures. Cette démarche, outre le fait de s'appuyer sur une notion de cohérence des choix du consommateur, permet de remonter directement d'une fonction de demande à la fonction d'utilité l'ayant engendrée. Ce qui simplifie considérablement la démarche sur le plan mathématique. L'inconvénient est qu'elle nécessite de formuler des hypothèses difficilement interprétable économiquement pour coller au cadre du théorème et qui s'apparentent à une série d'astuces.

2.1 APPROXIMATION POLYNOMIALE ET STRUCTURE DE L'ECONOMIE : LA DEMONSTRATION DE SONNENSCHEIN

Sonnenschein entame sa démonstration en recourant au théorème Stone-Weirstrass prototype des théorèmes d'approximation. En outre, et à condition de prendre le degré de celui-ci suffisamment élevé, toute fonction continue de demande excédentaire peut s'écrire sous la forme d'un polynôme. Lequel, s'il est homogène de degré m, peut toujours se mettre sous la forme d'une somme de terme. Ainsi la demande excédentaire vectorielle *Z (P)* se décompose de la façon suivante :

$$Z(P) = (z_1(P), z_2(P), \ldots, z_n(P)) = (z_1(P), 0, \ldots, 0) + (0, z_2(P), \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, z_n(P)) \tag{2.1.1}$$

cette décomposition va lui permettre de considérer successivement les demandes excédentaires relatives de deux biens. Le bien 1 est supposé être celui désiré tandis que

[10] Ses conditions d'existence sont peu restrictives. On lui impose généralement d'être continue, surjective et croissante (confère [Debreu, 1959]). Notons que [Balasko, 1988] relève à juste titre que la monotonie ne constitue pas une condition nécessaire. En ce qui nous concerne ce point est secondaire. Il est par contre indispensable de remarquer que ces conditions d'existence sont vérifiées par pléthores de fonctions. Elles ne peuvent donc indiquer un niveau absolu de satisfaction.

[11] *R* désigne évidemment le revenu de l'agent. Bien qu'il ne s'agisse pas d'un vecteur, l'usage est néanmoins de l'écrire sous forme de majuscule.

le bien *(n+1)* joue le rôle de numéraire. De plus, chaque z_i *(P)* étant des polynômes homogènes de degré *k* en *P*, il est possible de les mettre sous la forme d'une somme de monômes du type :

$$c\,(p_1 + q_2 p_2 + \ldots + q_n p_n)^k$$

où *c* et les q_i ($i = 1,\ldots, n$) sont des constantes. Ces dernières représentants des quantités de biens.
Si on suppose que les agents dépensent l'intégralité de leurs revenus (autrement dit $p_1 + q_2 p_2 + \ldots + q_n p_n = R$) il s'ensuit que :

$$c\,(p_1 + q_2 p_2 + \ldots + q_n p_n)^k = f\,(p_1, R)$$

A ce stade Sonnenschein situe sa démonstration dans le cadre le plus simple possible. Il considère que l'économie est composée de deux agents *a* et *b* et que leurs revenus (c'est-à-dire leurs « dotations initiales ») sont constitués d'un panier comprenant l'ensemble des biens (à l'exception de celui désiré et du numéraire) de sorte que chaque agent ait pour dotation initiale le vecteur $(0,q_1/2,\ldots,q_n/2,0)$. Le problème se résume donc à trouver une fonction d'utilité continue, monotone, strictement quasi-concave dont les demandes du bien 1, relativement au bien *(n+1)*, s'additionnent de façon à donner $f\,(p_1, R)$ lorsque le revenu des agents est égal à $R/2$:

(2.1.2) $$f\,(p_1, R) = d_{a1}\,(p_1,R/2) + d_{b1}\,(p_1,R/2)$$

Pour cela, Sonnenschein choisit tout d'abord de façon appropriée la forme de la fonction de demande en bien 1 de l'agent a de sorte que celle-ci soit lipschitzienne sur un compact convexe *E* de $\mathbb{R}^n_{++}$. Il la définit de la manière suivante :
(2.1.3) $$d_{a1}\,(p_1, R/2) = 3kR - 3k/\varepsilon - B - 2$$
B étant un majorant de |f| sur E et k la constante de Lipschtiz. La fonction de demande de l'agent b correspond simplement à la différence $f\,(p_1, R) - d_{a1}\,(p_1, R/2)$ soit $d_{b1}\,(p_1, R/2) = f\,(p_1, R) - (3kR - 3k/\varepsilon - B - 2)$. Il en résulte $d_{a1}(\cdot) \leq -1$ puisque $3kR - 3k/\varepsilon - B - 2 = 3k\,(R-1/\varepsilon) - 2 - B \leq -2$ (ε étant déterminé tel que $R \leq 1/\varepsilon$). Ce qui est fort étonnant puisque $d_{a1}(\cdot)$ est une demande d'un bien désiré, elle ne peut donc pas être négative. Cette incohérence manifeste, bien que dénouée d'explication économique censée, n'est toutefois pas rédhibitoire dans la mesure où la fonction de demande est fabriquée de toute pièce de manière à pouvoir appliquer le théorème Houthakker-Uzawa. Or, ce théorème n'est qu'un intermédiaire – portant sur les demandes – dans le but d'obtenir le résultat (2.1.1).
Pareillement, comme $d_{b1}\,(p_1, R/2)$ est égal à $f\,(p_1, R) - (3kR - 3k/\varepsilon - B - 2)$, *R* étant par hypothèse majoré par $1/\varepsilon$ et $|\,f\,(p_1, R)\,|$ par *B* sur *E*, il en découle que $d_{b1}(\cdot) \geq 2$.
Si par construction f est lipschitzienne, il convient également de montrer qu'elle vérifie l'axiome fort des préférences révélées afin de pouvoir appliquer le théorème Houthakker-Uzawa. Dans ce cas précis, cela revient simplement à prouver l'implication suivante[12] :

[12] Cette implication est un résultat général de statique comparative qui énonce, dans le cadre d'une économie à deux biens, que si le prix relatif d'un bien augmente alors sa demande diminue. Pour faire le

(2.1.4) $p_1 > p_1' \Longrightarrow d_1 < d_1'$

Sa démonstration étant particulièrement lourde, nous nous contenterons d'en exposer la logique dans le cadre d'une économie d'échange composée exclusivement de deux biens. Lesquels seront numérotés par l'indice 1 et 2.

Pour démontrer (2.1.4), dans le cas de l'agent *a*, Sonnenschein définit l'ensemble $L(p_1,R/2)$ des couples prix-revenu $(p_1', R'/2)$ tels que, au prix relatif p_1' (donc $p_2 = 1$) le revenu $R'/2$ permet d'acheter exactement le panier $(d_{a1}(p_1,R/2),d_{a2}(p_1, R/2))$. Par conséquent, on a :

(2.1.5) $$p_1' d_{a1}(p_1, R/2) + d_{a2}(p_1, R/2) = R'/2$$

d'où :

(2.1.6) $$p_1' = \frac{R'/2}{d_{a1}(p_1,R/2)} - \frac{d_{a2}(p_1,R/2)}{d_{a1}(p,R/2)}$$

Comme par construction $d_{a1}(\cdot)$ est toujours inférieure à -1, il résulte de (2.1.6) que p_1' et $R'/2$ varient en sens contraire. Or, comme $d_{a1}(\cdot)$ est une fonction croissante du revenu (la plus simple possible car linéaire), il s'ensuit que la demande en bien 1 de l'agent a varie en sens contraire du prix de ce bien. Ce qui établit (2.1.4).

La démonstration pour l'agent b est un peu plus lourde. Comme d_{b1} est strictement supérieure à 1, on peut déduire de (2.1.6) :

(2.1.7) $$p_1' - p_1 < \frac{R'}{2} - \frac{R}{2}$$

De plus, dans la mesure où il est possible d'écrire :

(2.1.8) $$d_{b1}(p_1,R/2)-d_{b1}(p_1',R'/2) = d_{b1}(p_1',R/2)-d_{b1}(p_1',R'/2)-((d_{b1}(p_1',R/2)-d_{b1}(p_1,R/2))$$

Par définition, la première différence du second membre de (2.1.8), peut se mettre sous la forme suivante :

(2.1.9) $$3k\left(\frac{R'}{2}-\frac{R}{2}\right)+(f(p_1',R)-f(p_1',R'))$$

Si $f(p_1',R)-f(p_1',R')$ est positif (2.1.9) est bien entendu supérieure à son premier terme. Tel n'est plus le cas si $f(p_1',R)-f(p_1',R')$ est négatif. Toutefois, comme par hypothèse, *f* est lipschitzienne : elle est k-contractante. On a donc :

---

lien entre les préférences révélées et ce résultat, Sonnenschein utilise une version faible de la théorie des préférences révélées. Il démontre que $p_1d_1 + d_2 = p_1d_1' + d_2' \Rightarrow p_1d_1' + d_2' < p_1'd_1 + d_2$ ou encore que $p_1(d_1'-d_1) = d_2 - d_2' \Rightarrow p_1'(d_1'-d_1) < d_2 - d_2'$. Ce qui est équivalent à la proposition (2.1.4). Toutefois, le fait de mobiliser l'axiome « faible des préférences révélées » ne garantit plus le caractère quasi-concave de la fonction d'utilité.

(2.1.10) $$\left| f(p_1',R) - f(p_1',R') \right| \leq k\left|R - R'\right| = 2k\left(\frac{R'}{2} - \frac{R}{2}\right)$$

et par conséquent :

$$3k\left(\frac{R'}{2} - \frac{R}{2}\right) + (f(p_1',R) - f(p_1',R')) \geq 3k\left(\frac{R'}{2} - \frac{R}{2}\right) - 2k\left(\frac{R'}{2} - \frac{R}{2}\right) = k\left(\frac{R'}{2} - \frac{R}{2}\right)$$

Enfin en revenant à (2.1.8), afin d'étudier la deuxième différence du second membre, et en utilisant le fait que *f* est k-lipschitzienne en p_1 :

$$\left|d_{b1}(p_1',R/2) - d_{b1}(p_1,R/2)\right| = \left|f(p_1',R/2) - f(p_1,R/2)\right| \leq k\left|p_1' - p_1\right|$$

Ce qui finit d'établir que :

$$\left|d_{b1}(p_1,R/2) - d_{b1}(p_1',R'/2)\right| > k\left(\frac{R'}{2} - \frac{R}{2}\right) - k\left|p_1' - p_1\right|$$

Or si $p_1' > p_1$ alors en raison de (2.1.7) $k\left(\frac{R'}{2} - \frac{R}{2}\right) - k\left|p_1' - p_1\right| > 0$, ce qui implique que la demande du bien dont le prix relatif n'a pas augmenté est supérieure à celle dont le prix relatif a augmenté ($d_{b1}(p_1,R/2) > d_{b1}(p_1',R'/2)$).
Ces démonstrations, sur lesquelles Sonnenschein passe très rapidement dans son article, permettent de comprendre la manière dont sont construites les fonctions de demande. Leurs formes étranges relèvent d'un impératif technique : établir un résultat de statique comparative pour pouvoir appliquer le théorème Houtakker-Uzawa.
Reste une dernière difficulté à surmonter. A ce stade, la démonstration mobilise deux agents qui ont la même dotation initiale et qui souhaitent tous deux consommer un bien absent de celle-ci. Naturellement, aucun échange n'est possible.
Pour contourner ce problème Sonnenschein introduit un troisième agent détenteur que du bien $(n+1)$ et qui désire acquérir l'ensemble des autres biens à l'exception du bien 1. De sorte que le vecteur de demande excédentaire de cette économie ainsi constitué soit égal à $(z_1(P), 0,\ldots,0)$. Sonnenschein modifie ensuite la dotation initiale et les préférences de ce troisième agent afin qu'il se trouve détenteur du bien 1 ainsi que du bien $(n+1)$ et qu'il désire tous les autres biens exception faite du bien 2. Le vecteur de demande excédentaire de cette nouvelle économie est alors égal à $(0, z_2(P),\ldots,0)$. En répétant n fois cette procédure puis en additionnant les différents vecteurs de demande excédentaire ainsi obtenus Sonnenschein retrouve l'équation (2.1.1).
Le cheminement emprunté par Sonnenschein a deux conséquences. La première, immédiate, est que le nombre d'agents dans l'économie est supérieur au nombre de biens. Plus précisément, il est déterminé par le degré du polynôme servant à approximer la fonction de demande excédentaire. La seconde conséquence, sans doute la plus importante, est qu'en convoquant des agents dont les préférences excluent la consommation d'un bien, le goût pour les mélanges n'est pas assuré. Il s'ensuit que la fonction d'utilité associée à la relation de préférence de ces consommateurs est

simplement concave et non quasi-concave[13]. Ce qui renvoie à une conception cardinale de l'utilité, largement désuète, impliquant la décroissance de l'utilité marginale ainsi que de concevoir la fonction d'utilité comme définissant un niveau absolu de satisfaction.

La démonstration de Sonnenschein possède un mérite indéniable : rappeler l'importance et la complexité des interactions des agents. Car c'est bien de cette complexité dont provient la destruction « d'une partie des propriétés de la fonction de demande individuelle » [Balasko, 1988, p. 69] donnant ainsi un comportement quelconque à la fonction de demande excédentaire agrégée. Ainsi à la question posée, depuis Adam Smith, à la science économique consistant à savoir si la recherche par chacun de son propre intérêt conduit plutôt à l'harmonie ou au chaos, Sonnenschein apporte un début de réponse inattendue : on ne peut exclure qu'elle amène au chaos. Autrement dit, il est fort probable que la « main invisible » mue par la loi de « l'offre et la demande » se caractérise par d'incessantes fluctuations n'aboutissant à aucune coordination. Néanmoins, et bien qu'ingénieuse, la démonstration de Sonnenschein n'est pas la plus élégante et peut déconcerter par son aspect tortueuse. Elle n'est pas non plus exempte de réserves tenant principalement au nombre important d'agents qu'elle nécessite ainsi qu'à la conception de l'utilité à laquelle elle renvoie. Des doutes quant à sa portée peuvent être également émis eu égard les fonctions de demande qu'elle mobilise dont l'une est dénouée de sens économique. Enfin, en identifiant les demandes excédentaires à des polynômes, Sonneinschein se cantonne à un examen local de la stabilité. Autant d'éléments qui font affirmer à [McFadden et *al*, 1974] que la démarche prête difficilement à généralisation (« makes generalization difficult » (p. 362)).

2.2 LA DUPLICATION DU NOMBRE D'AGENTS : LA DEMONSTRATION DE MANTEL

L'étude de la stabilité réalisée par [Mantel, 1974] revêt un caractère plus général que celle effectuée par Sonnenschein. En outre, une réserve importante que l'on a pu émettre à propos de la démonstration de ce dernier concerne le nombre élevé d'agents qu'elle nécessite. Même si ce nombre important d'agents s'accorde bien avec un discours intuitif qui associe concurrence parfaite et « grand nombres de consommateurs », une pareille restriction est totalement étrangère aux principales descriptions formelles des marchés concurrentiels (voir notamment [Gale, 1955], [Debreu, 1959]) et sur lesquelles s'appuie la démonstration de Sonnenschein.
Pour sa part, Mantel travaille directement sur les fonctions de demande excédentaire, qu'il dote des propriétés qualitatives usuelles (continuité, homogénéité de degré zéro par rapport aux prix…), et non sur des polynômes. Ce qui lui permet de réduire le nombre d'agents indispensable à sa démonstration et de se contenter dans un premier temps

---

[13] Rappelons qu'une fonction f est concave sur un sous-ensemble E ouvert et convexe de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si pour tous X_1 et $X_2 \in$ E et tout $\lambda \in [0 ; 1]$, on a : $\lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2) \leq f(\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2)$. Une fonction f est quasi-concave sur un sous-ensemble E ouvert et convexe de $\mathbb{R}^n$ si pour tous X_1 et $X_2 \in$ E et tout $\lambda \in [0 ; 1]$, on a : $f(\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2) \geq min \{f(X_1), f(X_2)\}$. Sous cette forme, il est aisé de voir que la quasi-concavité implique ce que les micro-économistes nomment « un goût pour les mélanges » (en supposant que X_1 et X_2 soient des paniers de biens). Sur le plan économique, la quasi-concavité de la fonction d'utilité a pour conséquence la convexité des courbes d'indifférences.

d'associer à chaque bien un agent[14]. Son idée de départ est particulièrement simple : utiliser la loi de Walras pour construire les demandes excédentaires individuelles. Ainsi, Mantel commence par définir la fonction de demande excédentaire agrégée comme la somme des fonctions de demande excédentaire individuelles : $z(P) = \sum_i z_i(P)$. Puis en dérivant la relation $P \cdot z(P) = 0$ (loi de Walras), par rapport aux prix p_i ($z(P)$ étant supposée être de classe C^1), il établit une relation entre $z(P)$ et ses dérivées partielles:

$$z(P) + \sum_i p_i \; grad\, z_i(P) = 0 \tag{2.2.1}$$

où $z_i(P)$ est la i-ème composante de $z(P)$. Mantel utilise cette égalité pour fabriquer la fonction de demande excédentaire de l'agent i. Si celui-ci détient une quantité α de bien i, son revenu est $R_i = \alpha \cdot p_i$. Dans ce cas, on a :

$$-p_i \; grad\, z_i(P) = -\frac{R_i}{\alpha} grad\, z_i(P) \tag{2.2.2}$$

L'expression obtenue apparaît bien comme une fonction du revenu de l'agent i. Cependant, en l'absence de restrictions additionnelles sur $z_i(P)$ celle-ci peut à priori avoir une forme quelconque. En particulier, rien ne garantit que la relation de préférence du i-ème agent – à partir de laquelle est déduite sa demande – soit transitive. C'est pourquoi Mantel ajoute au membre de droite de l'équation précédente un terme supplémentaire, $(R_i/n)UP^{-1}$, où U est le vecteur colonne unitaire. Au final, la fonction de demande retenue pour l'agent *i* est :

$$\begin{aligned} d_i(P, R_i) &= \frac{R_i}{n} P^{-1} U - \frac{R_i}{\alpha} grad\, z_i(P) \\ &= \begin{pmatrix} 1/np_1 \\ \vdots \\ 1/np_j \\ \vdots \\ 1/np_n \end{pmatrix} R_i - \frac{R_i}{\alpha} grad\, z_i(P) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

La relation obtenue est des plus classiques dans la mesure où la demande apparaît comme une fonction décroissante des prix. Toutefois, pour s'assurer du caractère strictement positif de cette dernière, les prix doivent être positifs ainsi que majorés ($\varepsilon < p_j < 1/\varepsilon, j = 1,\ldots, n$ et $\varepsilon > 0$) et α doit bien entendu être choisit suffisamment grand.
A ce stade, Mantel stipule que la fonction de demande ainsi exprimée est le gradient en P de la fonction $- v_i(P) R_i$, où $v_i(P)$ est défini par :

[14] On utilisera par conséquent, et par soucis de simplification, le même indice pour désigner les biens et les agents.

(2.2.4) $$v_i(P)=\frac{z_i(P)}{\alpha}-\frac{1}{n}\sum_j ln(p_j)$$

on voit immédiatement que $v_i(P)$ est une fonction d'utilité indirecte[15] de l'agent *i*. Parallèlement, il convoque une hypothèse peu restrictive en considérant l'existence de constante b_i telles que :

(2.2.5) $$(P-P')\cdot grad\ z_i(P)\leq z_i(P)-z_i(P')+b_i\ \|P-P'\|$$

Cette hypothèse a pour but de permettre d'appliquer plusieurs fois de suite le théorème fondamental des fonctions convexes que l'on donne ci- après.

THEOREME. Soit *E* un sous-ensemble ouvert et convexe de $\mathbb{R}^n$ et soit *f* une fonction différentiable de *E*. Une condition nécessaire et suffisante pour que *f* soit convexe sur *E* est que, $\forall X\in E$ *et* $\forall X_0\in E$: $f(X)-f(X_0)\geq(X-X_0)\,grad\ f(X_0)$

Ainsi, b_i étant non positif, il en résulte que $z_i(P)$ est convexe. Le terme $-\frac{1}{n}\sum_j ln(p_j)$ étant de classe C^2 et strictement convexe puisque $p_j > 0$, $v_i(P)$ est aussi strictement convexe. Ce point est capital dans la démonstration de Mantel puisqu'il lui permet de montrer que la fonction de demande $d_i(\cdot)$ vérifie l'axiome fort des préférences révélées. En effet, si $d_i(P, R_i)$ est préféré révélé à $d_i(P', R_i)$ alors on a :

(2.2.6) $$P\cdot d_i(P',R_i)\leq P\cdot d_i(P,R_i)$$

Comme on suppose que la contrainte budgétaire est saturée, on peut également écrire :

(2.2.7) $$P'\cdot d_i(P',R_i)=R_i=P\cdot d_i(P,R_i)$$

en mettant (2.2.6) sous la forme :

(2.2.8) $$P\cdot d_i(P',R_i)-P\cdot d_i(P,R_i)\leq 0$$

puis en se servant de (2.2.7), la relation se met sous la forme :

(2.2.9) $$(P-P')\cdot d_i(P',R_i)\leq 0$$

Or, on observe que par construction la fonction de demande $d_i(P,R_i)$ est le gradient, relativement à *P*, de - $v_i(P)R_i$. Comme $v_i(P)$ est strictement convexe, il résulte de l'application du théorème fondamental des fonctions convexes que :

---

[15] En effet, par hypothèse $(grad\ \text{-}\ v_i(P))\cdot R_i = d_i(P,R_i) \Longrightarrow v_i(P) = U\,[\,d_i(P,R_i)/R_i\,]$ où *U* est la primitive.

(2.2.10) $v_i(P) > v_i(P')$

Il en découle qu'on ne peut avoir $P' \cdot d_i(P', R_i) \geq P' \cdot d_i(P, R_i)$ car, pour des raisons identiques, on devrait alors obtenir : $v_i(P') > v_i(P)$, ce qui contredirait (2.2.10).
En fait, comme nous l'avons dit, la fonction $v_i(\cdot)$ n'est rien d'autre qu'une fonction d'utilité indirecte. A ce titre, elle respecte la transitivité stricte de la relation d'ordre et l'on a :

(2.2.11) $v_i(P) > v_i(P')$ et $v_i(P') > v_i(P'') \Rightarrow v_i(P) > v_i(P'')$

Reste une difficulté à surmonter : lors de la définition de la fonction de demande $d_i(\cdot)$ le terme supplémentaire $(R_i/n)\ UP^{-1}$ a été introduit. En conséquence la somme des fonctions de demande excédentaire individuelles $z_i(P)$ n'est plus égale à $z(P)$ mais à :

(2.2.12) $$\sum_{i=1}^{n} z_i(P) = \alpha \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n} P^{-1}U - U \right) + z(P)$$

En effet, la demande excédentaire de l'agent i est égale à (en se souvenant que $R_i = \alpha p_i$) :

(2.2.13) $$z_i(P) = d_i(P, \alpha \cdot p_i) - \alpha U_i$$

En substituant $d_i(P, \alpha p_i)$ par son expression et en utilisant (2.2.2), il vient :

(2.2.14) $$\begin{aligned} z_i(P) &= \left(\frac{\alpha \cdot p_i}{n} P^{-1}U \right) - \left(\alpha U_i + p_i \ grad\ z_i(P) \right) \\ &= \alpha \cdot \left(\frac{p_i}{n} P^{-1}U - U_i \right) - p_i \ grad\ z_i(P) \end{aligned}$$

U_i étant le i-ème vecteur unitaire. En se servant de (2.2.1) et par simple sommation, on obtient l'expression (2.2.12) qui montre l'existence d'un terme résiduel.
Mantel convoque alors n autres agents, caractérisés par l'indice h (avec $h = 1,\dots, n$), dont la somme des demandes excédentaires doit au final permettre d'annuler les termes « rajoutés ». Ainsi, la fonction de demande excédentaire de l'agent h rajoutée est égale à :

$$\begin{aligned} z_h(P) &= d_i\left(P, (k-\alpha)U \cdot P\right) - (k-\alpha)U \\ &= \frac{\alpha}{n}(U - PUP^{-1}U) \end{aligned}$$

Son agrégation conduit à obtenir :

$$\sum_{h=1}^{n} z_h(P) = \alpha\left(U - \left(P \cdot \frac{U}{n}\right)P^{-1}U\right)$$

On constate aisément que l'addition des fonctions de demande excédentaire agrégées annule le terme résiduel de (2.2.12) de sorte que :

$$\sum_{i=1}^{n} z_i(P) + \sum_{h=1}^{n} z_h(P) = z(P)$$

A l'arrivée, que retenir de la démonstration de Mantel ? Ce qui frappe avant tout c'est son extrême simplicité. En dépit du fait qu'il reprenne l'idée d'additivité des agents à Sonnenschein, là ou ce dernier expose son raisonnement en une dizaine de pages, Mantel parvient à le faire en à peine quatre pages. Pour autant, sa démonstration n'est pas exempte de réserves plus où moins fondamentales. L'aspect quelque peu « parachuté » de l'équation (2.2.5) peut laisser perplexe ceux qui aiment être en présence de raisonnement logique motivé. Mais ce n'est pas tant dans cette équation qu'il convient de chercher le problème le plus important de la démonstration que dans le fait que Mantel raisonne à revenu donné (R_i étant égal par hypothèse à $\alpha \cdot p_i$). Ceci n'a rien de choquant lorsqu'on se place dans une optique d'équilibre partiel mais s'avère particulièrement gênant lorsqu'on s'intéresse à une évolution simultanée des prix sur l'ensemble des marchés. En outre, on ne peut exclure que pour certaine valeur du vecteur prix P certains ménages puissent avoir une très faible valeur des dotations initiales d'autant qu'elle se réduit à un bien.

3. STRUCTURE DE L'ECONOMIE ET DECOMPOSITION GEOMETRIQUE

Les démonstrations proposées par H. Sonnenschein et R. Mantel sont fondamentales. A partir d'elles, l'espoir d'établir la convergence de la « loi de l'offre et de la demande » dans un cadre général, c'est-à-dire en déduisant les fonctions de demande excédentaire à partir du seul comportement maximisateur des agents, semble singulièrement compromis. Pour cause : les demandes excédentaires gouvernant le processus de recherche d'un équilibre pouvant prendre une forme quelconque, il en est de même pour ce processus. Ce qui amène [Arrow, 1974], dans son allocution présidentielle devant les membres de l'American Economic Association, à être bien pessimiste quant à la possibilité de voir couronner de succès les recherches sur la stabilité du tâtonnement walrasien : « c'est un mécanisme de feedback dans lequel les erreurs sur les prix sont successivement corrigées en référence aux déséquilibres qu'elles engendrent […] les résultats n'étant en aucune manière nécessairement favorables à la stabilité du processus d'ajustement. ». On ne peut alors qu'être saisi entre les résultats obtenus et la croyance qui existait quant à l'existence d'un processus d'ajustement engendré par les forces du marché : « […] une hausse du prix au-dessus du niveau d'équilibre doit nécessairement faire entrer en jeu des forces tendant à provoquer une baisse; ce qui implique, en concurrence parfaite, qu'une hausse de prix rend l'offre plus importante que la demande. La condition de stabilité est la suivante : une hausse de prix rend l'offre plus importante que la demande, une baisse de prix rend la demande plus importante que

l'offre » [Hicks, 1956, p. 55]. Pour la première fois, les économistes commencent à concevoir, que même si les forces du marché s'exercent dans le sens voulu, l'équilibre puisse être instable.
En dépit du rôle essentiel de ces deux démonstrations, que l'on vient de souligner, celles-ci ne sont pas des plus élégantes (même si la preuve de R. Mantel simplifie considérablement celle de H. Sonnenschein). Elles se fondent sur plusieurs astuces, certes amusantes, mais qui conduisent à s'écarter parfois des hypothèses traditionnelles du modèle d'équilibre général (spécialement en ce qui concerne le nombre d'agents) ou induisent une difficulté d'interprétation. C'est la raison pour laquelle, quelques mois plus tard après la publication du travail de R. Mantel, deux nouvelles démonstrations sont présentées. La première, celle de G. Debreu, s'attèle à réduire le nombre d'agents. La seconde, formulée par McFadden et *al*, lève l'hypothèse de continuité de la fonction de demande excédentaire.

3.1 LA DEMONSTRATION DE DEBREU

La démonstration de [Debreu, 1974], souvent considérée comme la preuve « the most remarkable » [Geanakoplos, 1984, p.1], se présente comme une extension de celle de R. Mantel. En proposant cette nouvelle étude, Debreu manifeste clairement sa volonté de réduire le nombre minimum d'agents: « Thus, differentiability assumptions can be dispensed with, and, as Rolf Mantel conjectured (1974), the additive decomposition that he performed with 2*l* consumers can be performed with only *l* consumers. » [Debreu, 1974, p. 16]. Au delà de cet aspect, on peut également conjecturer qu'il cherche à adopter une position « plus walrasienne » en fondant son étude de la structure des fonctions de demande excédentaire sur le portrait qu'il brosse d'une économie concurrentielle dans sa *Théorie de la valeur* (1959). Ainsi, G. Debreu considère des fonctions d'utilité quasi-concave représentant des relations de préférences continues et convexes. Ces hypothèses, nécessaires pour des raisons techniques, permettent également de développer une vision de l'économie faite d'individus libres et égaux pouvant en toute indépendance choisir de procéder à des échanges dans la mesure où leurs dotations initiales leurs permets de survivre sans y avoir recours (hypothèse de continuité).
Quoi qu'il en soit, la démonstration qu'exhibe Debreu s'avère beaucoup plus générale que celles de [Sonnenschein, 1973] et [Mantel, 1974]. La seule condition qu'il convoque est la continuité de la fonction $z(P)$. Cette unique hypothèse a pour effet de compliquer considérablement sa tâche dans la mesure où il ne peut faire appel à la théorie des préférences révélées et au théorème Houthakker-Uzawa qui nécessite des fonctions de lipschitz.
La démonstration que propose Debreu part d'un constat géométrique : les fonctions de demande excédentaire étant homogènes de degré zéro, leur domaine de variation peut être limité à la sphère unitaire. Autrement dit, le vecteur prix P est soumis à la condition de normalisation suivante : $\sum p_i^2 = 1$. Une fois cette dernière imposée, Debreu remarque – qu'en tenant compte également de la loi de Walras – le vecteur des demandes excédentaires doit être orthogonal au vecteur des prix. Ce qui l'amène à considérer le vecteur suivant :

(3.1.1) U_i - p_iP

où U_i est comme à l'accoutumé le i-ème vecteur unitaire. On constate aisément que ce vecteur est orthoganal à P si l'on se trouve sur la sphère unitaire :

(3.1.2) $$P \cdot (U_i - p_i P) = P \cdot U_i - p_i P \cdot P = p_i - p_i = 0 \quad \forall i$$

Le choix du vecteur (3.1.1) n'est pas le fruit du hasard. A ses propriétés géométriques s'ajoutent des caractéristiques économiques qui conviennent naturellement à des demandes excédentaires. Ainsi, la demande excédentaire du bien *i*, déduite de (3.1.1) et qui équivaut $i - p_i^2$, est une fonction décroissante du prix du bien. De plus, elle est par construction toujours positive.
Malgré ces caractéristiques, les fonctions U_i - p_iP ne peuvent pas être considérées en l'état comme des fonctions de demande excédentaire individuelles dans la mesure où leur somme n'a aucune raison d'être égale à $z\ (P)$. C'est pourquoi, Debreu modifie la « longueur » du vecteur U_i - p_iP sans évidemment changer sa direction (orthogonale à P). Ce qui l'amène à considérer la fonction suivante :

(3.1.3) $z_i(P)\ (U_i - p_iP)$

Par sommation, on obtient alors :

(3.1.4) $$\sum_{i=1}^{n} z_i(P)\left(U_i - p_iP\right) = (z_1(P), z_2(P), \ldots, z_n(P)) - P\sum_{i=1}^{n} p_i z_i(P)$$

Or ($z_1(P), z_2(P),\ldots,z_n(P)$) étant égal par hypothèse à $Z\ (P)$ et $P\sum_{i=1}^{n} p_i z_i(P) = 0$ du fait de la loi de Walras, il en découle que $\sum_{i=1}^{n} z_i(P)\left(U_i - p_iP\right) = Z(P)$.

La démonstration que l'on a donné ici, qui s'inspire directement de la manière dont [Shafer, Sonnenschein, 1982] ont synthétisé la présentation de Debreu, est particulièrement vulgarisée. Lorsqu'on regarde directement l'article de [Debreu, 1974] les choses apparaissent bien moins simples. Cela tient au fait que G. Debreu ne convoque, on l'a dit, qu'une seule hypothèse : la continuité de la fonction de demande excédentaire. Ce faisant il est contraint de construire les relations de préférences et de déterminer les dotations initiales engendrant les demandes excédentaires individuelles choisies arbitrairement. D'où la lourdeur de sa présentation.
Enfin, et même si elles n'ont à priori rien d'aberrantes d'un point de vue économique, la forme des demandes excédentaires (3.1.3) n'en demeure pas moins peu conventionnelle. Cela provient du fait qu'elles sont toutes construites sur le principe d'une projection du vecteur unitaire. Ce qui revient à considérer que l'agent *i* n'est demandeur net que du bien *i* (et donc offreur net de tous les autres biens) et que seul compte la « longueur »

du vecteur de ses dotations initiales pour qu'il puisse avoir une demande en bien *i* strictement positive. La démonstration de Debreu met donc en scène des agents aux goûts très différents et implique une forte dispersion des revenus. Ces derniers variant fortement à la moindre modification du vecteur-prix. C'est incontestablement sur ces points que l'article de Debreu a prêté le flanc à la critique.

3.2 LA DEMONSTRATION DE MCFADDEN ET *AL*

La dernière approche que l'on va examiner est celle présentée par [McFadden, Mas-Colell, Mantel et Richter, 1974]. Son apport principal est d'étendre la démonstration de Debreu au cas où la fonction de demande excédentaire n'est plus continue. Evidemment dans ce cas l'existence même de l'équilibre est susceptible d'être compromise faisant perdre son sens à l'étude de la stabilité. D'où l'idée de ne plus majorer le vecteur prix, et de privilégier l'étude du comportement de la fonction de demande excédentaire lorsque les prix tendent vers zéro ou l'infini, tout en considérant que cette dernière se situe dans un compact strictement inclus dans le premier orthant, $\mathbb{R}^n_{++}$. Rien n'interdit alors – sous réserve que la fonction de demande excédentaire soit continue au voisinage des bornes – de considérer que le point fixe se trouve sur la frontière de l'orthant[16].
A travers cette volonté de lever l'hypothèse de continuité de la fonction de demande excédentaire se cache l'ambition de s'affranchir de l'hypothèse de survie du consommateur, si délicate à interpréter dans une logique walrasienne, et que [Koopmans, 1970] expose en ces termes : « Le plan que fait chaque consommateur, en réponse au système des prix, comprend une spécification de sa durée de vie compatible avec ses ressources présentes, sa capacité d'effectuer un travail rémunérateur et d'autres aspects du plan de vie. Les postulats doivent simplement assurer la survie de chaque consommateur au moins dans la première période » (p. 62). La garantie de la survie de chaque agent durant un temps minimal se faisant grâce à des « transferts de revenu par l'impôt et la sécurité sociale » (*ibid*). Si une redistribution des richesses présente l'avantage d'éviter que des consommateurs puissent passer de vie à trépas selon les modifications du système de prix et de la variation de la valeur des dotations initiales qui en résulte, elle s'avère toutefois largement en contradiction avec le slogan, dont [Rebeyrol, 1999] se fait l'écho, martelé par L. Walras : « A chacun selon son travail » (p. 28). C'est, sans aucun doute, cette volonté de fournir une étude des fonctions de demande excédentaire induisant une représentation de l'économie plus conforme aux préceptes walrasiens qui a convaincu R. Mantel de collaborer – peu de temps après avoir publié sa propre étude – à ce nouvel examen des fonctions de demande excédentaire.
A l'instar de G. Debreu, la démonstration de McFadden et *al* use d'arguments géométriques. En outre, l'absence d'une hypothèse de continuité interdit d'emblée tout recours à des fonctions Lipschtziennes ou à des arguments de type dérivabilité. Pour contourner cette difficulté, McFadden et *al* commencent par définir un ensemble Q

[16] On comprend dès lors mieux la remarque initiale de [Balasko, 1988] faisant état de la nécessité de prendre en compte le comportement au « bord » de la fonction de demande excédentaire.

correspondant à l'intersection du vecteur prix P appartenant à $\mathbb{R}^n_{++}$ avec la sphère de radiant *2 /q /*centrée en *– q* :

(3.2.1) $$Q = \left\{ p \in P \,\middle|\, (\, p + q\,) \cdot (\, p + q\,) = 4q \right\}$$

L'ensemble *Q* va alors servir à construire une fonction g_i *(P)*, étape intermédiaire pour définir les fonctions de demande excédentaire individuelles notées comme à l'accoutumé z_i *(P).* Ainsi, g_i *(P)* est présentée comme une application de *Q* dans $\mathbb{R}$ tandis que z_i *(P)* est une application de *Q* dans $\mathbb{R}^n$ telle que :

(3.2.2) $$z_i(\, P\,) = g_i(\, P\,)\left(I - \frac{(\, p + q\,)\; p^T}{p \cdot (\, p + q\,)} \right) U_i$$

où *I* est la matrice identité, U_i le i-ème vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ et p^T la transposée du vecteur prix *P*.
Le problème se résume donc à prouver, encore une fois, que la fonction de demande excédentaire agrégée peut s'écrire comme la somme des fonctions de demande excédentaire individuelles ainsi définit. A l'image de Debreu, Mc Fadden et *al* partent alors d'une interprétation géométrique : z_i *(P)* est la projection oblique le long de p + q du vecteur g_i *(P) · U* sur l'hyperplan d'équation $T(\, P\,) = \left\{ z(\, P\,) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, P \cdot Z(\, P\,) = 0 \right\}$. C'est la raison pour laquelle, il est possible – en agrégeant – de poser :

(3.2.3) $$Z(\, P\,) + p + q = \sum_{i=1}^{n} g_i(\, P\,) U_i$$

En tenant compte de la loi de Walras, cette dernière ligne peut également s'écrire :

(3.2.4) $$p \cdot (\, p + q\,) = \sum_{i=1}^{n} g_i(\, P\,) p \cdot U_i$$

Il découle alors de (3.2.3) :

(3.2.5) $$Z(\, P\,) = \sum_{i=1}^{n} g_i(\, P\,) U_i - (\, p + q\,)$$

Puis incluant un élément neutre sur la base de (3.2.4) et après plusieurs arrangements, on parvient au résultat escompté:

$$
\begin{aligned}
Z(P) &= \sum_{i=1}^{n} g_i(P)U_i - (p+q)\sum_{i=1}^{n} g_i(P)p\cdot U_i\left(p\cdot(p+q)\right)^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} g_i(P)\left(I - \frac{(p+q)\,p^T}{p\cdot(p+q)}\right)U_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} z_i(P)
\end{aligned}
\qquad (3.2.6)
$$

Globalement, la démonstration proposée par McFadden et *al* paraît plus tortueuse que celle de Debreu qui use également d'arguments géométriques. Outre la discontinuité de *z(P)*, cela tient au fait que le vecteur prix n'est plus majoré, contrairement à Debreu qui le définissait sur un compact. En ne majorant pas le vecteur-prix, McFadden et *al* s'exposent alors au risque de ne plus pouvoir représenter la relation de préférence des agents dès lors que des prix relatifs tendent vers zéro ou l'infini[17]. C'est sans doute là, la raison pour laquelle – bien qu'étant la démonstration la plus générale – la voie empruntée par McFadden et *al* sera peu suivie. Les auteurs suivants préférant conserver l'hypothèse de continuité des fonctions de demande excédentaire ainsi que celle de compacité du vecteur-prix. C'est ainsi que [Mantel, 1979] établira que si *z(P)* a des dérivées partielles secondes bornées, la relation de préférence des agents est homogène en plus d'être continue, monotone et strictement convexe.

4. CONCLUSION

En moins de deux ans, nous sommes donc passés d'une démonstration plutôt alambiquée à d'élégantes preuves basées sur des méthodes de décomposition géométrique. Mais toutes les démonstrations, aussi raffinées soit-elles, confirment inéluctablement l'intuition de H. Sonnenschein: les fonctions de demande excédentaire ont les caractéristiques d'un champ de vecteurs arbitraires. Ce faisant toute fonction respectant la loi de Walras et homogène de degré zéro peut faire office de fonction de demande excédentaire.

Accueilli dans un premier temps avec circonspection, la seconde partie des années soixante dix marqua un tournant dans la manière d'appréhender ce résultat. Après la phase d'élaboration du théorème Sonnenschein-Mantel-Debreu, vînt le temps des doutes sur sa robustesse. C'est ainsi que la réaction suivante fût d'essayer d'en réduire la portée. Ainsi pour [Hildenbrand, 1984] les conclusions des démonstrations sont liées

[17] Ce qui peut, au premier abord, paraître surprenant puisque le concept de relation de préférence ne fait pas intervenir le système de prix. Toutefois, n'oublions pas qu'à l'optimum le programme du consommateur est tel que $\frac{U'_{q_i}(Q)}{U'_{q_j}(Q)} = \frac{p_i}{p_j}$ où Q est un n-uplet, $Q = (q_1,\ldots,q_i,q_j,\ldots,q_n)$, représentant un panier de bien et *U(·)* est la fonction d'utilité d'un consommateur donné. On voit aisément que dès lors que p_j tend vers zéro, le taux marginal de substitution (rapport des dérivées partielles) tend vers l'infini.

à une absence de prise en compte de la production : « Les résultats de Sonnenschein, Mantel, Debreu, Mas-Colell et autres montrent, selon moi, qu'une économie d'échange ne peut plus continuer à servir en tant que modèle approprié pour représenter une économie, si on veut aller au-delà du problème de l'existence et l'optimalité ». Dans la même veine que la remarque introductive de Deaton, [Grandmont, 1987] parla avec euphémisme de « résultats embarrassants » objectant que ceux-ci, notamment celui de Debreu, sont liés au caractère très disparate des goûts des agents : « Economic theory is plagued by quite a few embarassing results. An obvious example is social choice theory with Arrow's famous impossibility theorem […]. No less important is the Debreu-Sonnenschein claim that summation over consumers does not place any other restrictions on competitive aggregate excess demand than Walras law on arbitrary compact sets of prices. The principle of a possible solution to the problem has been known for some time but has not yet been implemented much successfully. It is to put restrictions not so much on the support of the distribution of the agents' characteristics but on its shape. » (p. 155). Face à ce scepticisme ambiant, s'engagea alors des publications tout azimut pour tester la sensibilité du théorème Sonnenschein-Mantel-Debreu aux variations de paramètres du modèle. C'est ainsi que [Kirman, Koch, 1986] examinèrent le cas où les agents ont la même relation de préférence et des dotations initiales homothétiques (rendant ainsi l'échelle des revenus indépendante des prix). Ils arrivèrent alors à la conclusion « that any arbitrary excess demand function may be generated by an exchange economy with any fixed price independent relative income distribution and identical preferences for all agents.» (p. 460). Quant à [Mas-Collel, 1977], il affirma la validité du théorème dans une économie présentant des équilibres multiples. [Geanakoplos, Polemarchakis, 1986] arrivèrent à une conclusion similaire lorsque le nombre d'agents est inférieur au nombre de biens[18].

Cette série de travaux sonna définitivement le glas de l'espoir d'établir la stabilité de la loi de l'offre et la demande dans un cas général. Il ne resta plus qu'à se replier sur l'étude au cas par cas en fonction des valeurs données aux divers paramètres du modèle (dotations initiales, relation de préférence…). Mais là encore, les travaux menés successivement par [Balasko, 1986], [Balasko, 1988] et [Guerrien, 1989] n'invitent pas à penser que la convergence vers l'équilibre soit la situation la plus probable. Au point d'amener [Hahn, 1982, p. 745] à l'aveu suivant : « Dans un contexte d'équilibre général, c'est-à-dire dans une situation où beaucoup de prix sont en train de changer simultanément, l'analyse de la « loi de l'offre et la demande » devient plus complexe et la convergence vers l'équilibre plus problématique […]. Nous arrivons à la conclusion qu'il y a une vaste catégorie d'économies qui ont des équilibres instables avec la forme la plus populaire du mécanisme des prix »[19].

---

[18] Les réserves introductives exprimées par [Chiappori, Ekeland, 1999], et qui trouvaient un écho certain dans le cadre des démonstrations étudiées dans cet article, peuvent être levées. Le théorème Sonnenschein-Mantel-Debreu restant valide – comme mentionné – dès lors que le nombre d'agents est strictement inférieur à celui des biens.

[19] D'autres économistes réputés se rallient, à mi-mots, au point de vue de Hahn. Sans évoquer explicitement les résultats de Sonnenschein-Mantel-Debreu, [Malinvaud, 1991, p. 169] laisse entendre que « la stabilité de l'équilibre économique général reste ainsi une propriété assez incertaine. ». D'une façon similaire, [Scarf, 1982] avait auparavant estimé que le processus de tâtonnement « can be used neither to provide a proof of the existence of competitive equilibria nor an effective computational procedure for the general case. » (p. 1012).

Cette multiplication de déconvenues contraste avec l'optimisme qui était de rigueur au moment d'aborder les problèmes de stabilité des marchés. Celle-ci semblait devoir être la règle même si, de façon exceptionnelle, « l'on peut concevoir […] qu'un équilibre concurrentiel unique et instable puisse être trouvé » [Arrow, Hurwicz, 1958, p. 523]. Depuis l'espoir semble s'être définitivement évaporé d'obtenir en matière de stabilité les mêmes succès que ceux acquis concernant les preuves d'existence d'un équilibre. Pourtant, en l'absence de résultats probants la théorie néoclassique semble dangereusement proche de l'inconsistance : « Si l'existence d'équilibres est une condition nécessaire pour qu'un modèle ait un sens, c'est loin d'être une condition suffisante. Car un équilibre ne présente d'intérêt que s'il peut être atteint […] » [Guerrien, 1992, p. 567]. Sans équilibre stable, les prix fluctuent de manière erratique privant de tout aspect prédictif le modèle d'équilibre général.
Pour finir, nous voudrions insister sur un dernier élément. Même si nous avons traité ici que cet aspect, la portée du théorème Sonnenschein-Mantel-Debreu ne se limite pas à une incidence théorique concernant la stabilité du tâtonnement walrasien. Il a également un impact fondamental sur les modèles économétriques qui posent des restrictions a priori sur le signe de certains coefficients structurels ou qui assimilent le comportement collectif à un comportement individuel (cas de l'« agent représentatif »). Sa robustesse et sa portée amène la théorie économique des marchés, dans ce qu'il convient d'appeler, une impasse.

BIBLIOGRAPHIE

ARROW J.K., « Connaissance limitée et analyse économique », Discours en tant que Président de l'association des économistes américains (traduit et reproduit dans *Economie Appliquée*),1974.

ARROW J.K, HURWICZ L., « On the stability of a competitive economy I », *Econometrica*, Vol. 26, 1958, pp. 522-554.

ARROW J.K., BLOCK H., HURWICZ L., « On the stability of a competitive economy II », *Econometrica*, vol. 27, 1959, pp. 82-109.

ARROW J.K., HAHN F. (1971), *General Competitive Analysis*, Holden Day, San Francisco.

BALASKO Y., « The class of aggregate excess demand functions », in *Essays in honor of Gerard Debreu*, 1986.

BALASKO Y., *Fondements de la théorie de l'équilibre général concurrentiel*, Paris, Economica, 1988.

CHIAPORRI P.A., EKELAND I., « Disaggregation of Excess Demand Functions in Incomplete Markets », *Journal of Mathematical* Econimics, 1999, pp. 111-129.

DEATON. A., « Models and Projections of Demand in Post-war Britain », *Cambridge Studies in Applied Econometric*, 1975

DEBREU G., *Théorie de la valeur*, Paris, Dunod, 1959.

DEBREU G., « Excess Demand Functions », *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 1, 1974, pp. 15-21.

DEBREU G., « Existence of a competitive equilibrium » in *Handbook of Mathematical Economics*, 1982.

GALE D., « The Law of Supply and Demand », *Mathematica Scandinava*, vol. 3, 1955, pp. 159-169.

GEANAKOPLOS J.D, «Utility Functions for Debreu's Excess Demand», *Journal of Mathematical Economics*, vol. 13, No. 1, 1984, pp. 1-9.
GEANAKOPLOS J.D., POLEMARCHAKIS H.M., « On the Disaggregation of Excess Demand Functions », *Econometrica*, Vol. 48, No. 2, 1980, pp. 315-331.
GRANDMONT J.M., « Distributions of preferences and the "Law of Demand " », *Econometrica*, Vol. 55, No. 1, 1987, pp. 155-161.
GUERRIEN B., *Concurrence, flexibilité et stabilité*, Paris, Economica, 1989.
GUERRIEN B., « Où en est le programme de recherche néo-classique ? », *L'Actualité économique*, Vol. 68, No.4, 1992, pp. 564-586.
HAHN F., « Stability » in *Handbook of Mathematical Economics*, 1982.
HILDENBRAND W., « On the "Law of Demand " » *Econometrica*, Vol. 51, No. 4, 1984, pp. 997-1019.
HICKS J., *Valeur et Capital*, Paris, Dunod, 1956
KARLIN S., *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics*, Pergamon Press, 1959
KIRMAN A.P, KOCH K.J., « Market Excess Demand in Exchange Economies with Identical Preferences and Collinear Endowments », *Review of Economic Studies* LIII, 1986, pp. 457-463.
KOOPMANS T.C., *Trois essais sur la science économique contemporaine*, Paris, Dunod, 1970.
MALINVAUD E., *Voie de recherche de la marcoéconomie*, Paris, Odile Jacob, 1991.
MANTEL R.R, « On the Characterization of Aggregate Excess Demand », *Journal of Economic Theory* 7, 1973, pp. 348-353.
MANTEL R.R, « Homothetic preferences and community excess demand functions », *Journal of Economic Theory* 12, 1979, pp. 197-201.
MAS-COLELL A., « On the equilibrium price set of an exchange economy », *Journal of Mathematical Economics*, vol. 4, 1977, pp. 117-126.
MCFADDEN D. et *AL*, « A Characterization of Community Excess Demand Functions », *Journal of Economic Theory*, vol. 9, No. 4, 1974, pp. 361-374.
REBEYROL A., *La pensée économique de Walras*, Paris, Dunod, 1999.
SAMUELSON P.A., *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, 1947.
SCARF H., « The computation of equilibrium prices: An exposition », *Handbook of Mathematical Economics*, 1982.
SHAFER W., SONNENSCHEIN H., « Market Demand and Excess Functions », *Handbook of Mathematical Economics*, 1982.
SONNENSCHEIN H., « Market Excess Demand Functions », *Econometrica*, Vol. 40, No. 3, 1972, pp. 549-563.
SONNENSCHEIN H., « Do Walras'Identity and Continuity Characterize the Class of Community Excess Demand Functions? », *Journal of Economic Theory*, vol. 6, 1973, pp. 345-354.
WALRAS L., *Eléments d'Economie Politique Pure*, LJDJ, 1874.